12 МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Дано уравнение:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{89}$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [a,b]$ удовлетворяет уравнению (89), а на концах отрезка $[a,b]$ - краевым условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_1[y(a), y'(a)] = 0 \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Отличие краевой задачи от задачи Коши заключается в том, что в условия (90) входят значения функции и ее производной не в одной точке, а в двух «краевых» точках отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (89) и граничные условия (90) линейны:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{92}$$

где $p(x), q(x), f(x)$ - известные непрерывные на $[a,b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ - заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

12.1 Метод конечных разностей

На отрезке $[a,b]$ введем равномерную сетку: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = x_0 + ih, i = 1,2,..,n-1$, и обозначим: $p_i = p(x_i); \quad q_i = q(x_i); \quad f_i = f(x_i).$

Заменим производные в дифференциальном уравнении (91) и краевых условиях (92) их разностными аналогами. Способов такой замены много, мы выберем центрально-разностные соотношения:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \tag{93}$$

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \tag{94}$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнения (91) и краевые условия (92) системой:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \quad i = 1,2,...,n-1 \\ &\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Система (95) представляет систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными $y_i, \quad i = 0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$.Оценка погрешности аппроксимации при замене задачи (91)-(92) ее разностным аналогом (95) имеет вид:

$$\left|y_i - y(x_i)\right| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2, \quad M_4 = \max_{[a,b]} \left|y^{(IV)}(x)\right| \tag{96}$$

Пример:

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0, \quad y(1.4) = \frac{1}{2}\ln^2(1.4) = 0.0566 \end{cases}$$

Решение:

Заменим уравнение и граничные условия их разностными аппроксимациями:

$$x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h} = 1, \quad i = 1,2,3,....,n$$

Соберем подобные слагаемые:

$$y_{i-1}\left(\frac{x_i^2}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right) - y_i\left(\frac{2x_i^2}{h^2}\right) + y_{i+1}\left(\frac{x_i^2}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right) = 1$$

Умножим обе части уравнения на $2h^2$:

$$\left.\begin{aligned} &y_{i-1}(2x_i^2 - hx_i) - 4x_i^2 y_i + y_{i+1}(2x_i^2 + hx_i) = 2h^2 \\ &y_0 = 0 \\ &y_n = 0.056 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Выберем шаг $h = 0.1$, тогда получим три внутренних узла $x_i = 1 + 0.1 \cdot i; \quad i = 1,2,3$. Написав уравнение (97) для каждого из этих узлов, получим систему:

$$\left.\begin{aligned} &2.31y_0 - 4.84y_1 + 2.53y_2 = 0.02 \\ &2.76y_1 - 5.76y_2 + 3.00y_3 = 0.02 \\ &3.25y_2 - 6.76y_3 + 3.51y_4 = 0.02 \\ &y_0 = 0 \\ &y_4 = 0.0566 \end{aligned}\right\} \qquad (98)$$

Решая систему (98), получим: $y_1 = 0.0046, \quad y_2 = 0.0167, \quad y_3 = 0.0345$

Для сравнения приведем точные значения решения этой краевой задачи в тех же узлах: $y_1^{точ} = 0.0047, \quad y_2^{точ} = 0.0166, \quad y_3^{точ} = 0.0344$

12.2 Метод прогонки

В случае большого числа узлов решать систему (98) обычными методами бывает сложно. Например, если взять шаг $h = 0.01$, то в нашем примере n будет равняться 40 и система (97) будет иметь размерность 41×41, и решать ее даже с помощью ЭВМ сложно. Однако, в данном случае особенность системы (97) заключается в том, что ее матрица имеет трехдиагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 2x_1^2 - hx_1 & -4x_1^2 & 2x_1^2 + hx_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2^2 - hx_2 & 4x_2^2 & 2x_1^2 + hx_1 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 - hx_3 & 4x_3^2 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots\ldots & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 4x_{n-1}^2 & 2x_{n-1}^2 + hx_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} &a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j \quad , \qquad j = 1,2,3,\ldots,n-1 \\ &y_0 = \nu_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \nu_2 y_{n-1} + \mu_2 \end{aligned} \qquad (99)$$

Сначала осуществляется прямая прогонка, при которой вычисляются коэффициенты:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \nu_1, \quad \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,\ldots,n-1 \\ &\beta_1 = \mu_1, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,\ldots,n-1 \end{aligned} \quad . \qquad (100)$$

После этого осуществляется обратная прогонка, при которой вычисляются искомые значения функции:

$$y_n = \frac{\nu_2\beta_n + \mu_2}{1-\nu_2\alpha_n}, \quad y_j = \alpha_{j+1}y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = n-1,\, n-2,\ldots..,1,\, 0 \quad . \qquad (101)$$

Достаточные условия сходимости метода прогонки следующие:

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1,\, 2,\, ...,\, n-1; \quad |\nu_1| \leq 1, \quad |\nu_2| < 1 \quad . \qquad (102)$$

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1 \quad , \qquad (103)$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [2;2{,}3]$ удовлетворяет уравнению (103), а на концах отрезка $x \in [2;2{,}3]$ - краевым условиям:

$$\begin{aligned} y(2) + 2y'(2) &= 1 \\ y(2{,}3) &= 2{,}15 \end{aligned} \qquad (104)$$

Введем сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\, i = 1,2,..,n-1; \quad x_0 = 2, \quad x_n = 2{,}3\}$. Если взять $h = 0{,}05$, то $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}3-2}{0{,}05} = 6$.

Обозначим $y_i = y(x_i)$ и заменим производные в дифференциальном уравнении (103) их разностными аналогами. Способов такой замены много, мы выберем центрально-разностные соотношения:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2};$$

Тогда уравнение (103) примет вид:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\frac{y_i}{x_i} = 1; \quad i = 1,2,...,n-1 \quad , \qquad (105)$$

соберем подобные слагаемые:

$$y_{i-1}(\frac{1}{h^2}-\frac{x_i}{2h})-y_i(\frac{2}{h^2}+\frac{0,5}{x_i})+y_{i+1}(\frac{1}{h^2}+\frac{x_i}{2h})=1, \quad (106)$$

и умножим обе части уравнения на h^2:

$$y_{i-1}(1-0,5hx_i)-y_i(2+\frac{0,5h^2}{x_i})+y_{i+1}(1+0,5hx_i)=h^2 \quad (107)$$

Краевые условия (104) можно записать в виде:

$\begin{cases} y_0+2y_0'=1 \\ y_n=2,15 \end{cases}$ и заменить производную y_0' разностным соотношением:

$y_0' \approx \frac{y_1-y_0}{h}$, тогда они примут вид: $\begin{cases} y_0+2\frac{y_1-y_0}{h}=1 \\ y_n=2,15 \end{cases}$, собирая подобные слагаемые в первом уравнении, получим:

$$y_0\frac{h-2}{h}+y_1\frac{2}{h}=1$$
$$y_0(h-2)+2y_1=h$$
$$y_0=\frac{2}{2-h}y_1+\frac{h}{h-2}$$

Окончательно получим следующую систему для нахождения y_i:

$$y_{i-1}(1-0,5hx_i)-y_i(2+\frac{0,5h^2}{x_i})+y_{i+1}(1+0,5hx_i)=h^2, \quad i=1,2,...,n-1$$
$$y_0=\frac{2}{2-h}y_1+\frac{h}{h-2}$$
$$y_n=0\cdot y_{n-1}+2,15 \quad (108)$$

которая представляет из себя систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными y_i, $i=0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$.Такие системы удобно решать с помощью метода прогонки (99)-(101).

a=	2		
b=	2,3		
h=	0,01		
n=	(b-a)/h		
n=	30		
nu_1=	1,005025	nu_2=	0

mu_1=	-0,00503	mu_2=	2,15				
f_i=	-0,0001						
i	**x_i**	**a_i**	**b_i**	**c_i**	**alpha$_i$**	**beta$_i$**	**y_i**
0	2,0000	0,9900	1,0100	2,0000			2,2348
1	2,0100	0,9900	1,0101	2,0000	1,0050	-0,0050	2,2286
2	2,0200	0,9899	1,0101	2,0000	1,0049	-0,0050	2,2228
3	2,0300	0,9899	1,0102	2,0000	1,0048	-0,0051	2,2171
4	2,0400	0,9898	1,0102	2,0000	1,0047	-0,0051	2,2118
5	2,0500	0,9898	1,0103	2,0000	1,0046	-0,0051	2,2067
6	2,0600	0,9897	1,0103	2,0000	1,0045	-0,0051	2,2018
7	2,0700	0,9897	1,0104	2,0000	1,0044	-0,0051	2,1972
8	2,0800	0,9896	1,0104	2,0000	1,0043	-0,0052	2,1929
9	2,0900	0,9896	1,0105	2,0000	1,0042	-0,0052	2,1888
10	2,1000	0,9895	1,0105	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1849
11	2,1100	0,9895	1,0106	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1813
12	2,1200	0,9894	1,0106	2,0000	1,0040	-0,0052	2,1779
13	2,1300	0,9894	1,0107	2,0000	1,0039	-0,0052	2,1747
14	2,1400	0,9893	1,0107	2,0000	1,0038	-0,0052	2,1717
15	2,1500	0,9893	1,0108	2,0000	1,0037	-0,0052	2,1689
16	2,1600	0,9892	1,0108	2,0000	1,0036	-0,0052	2,1664
17	2,1700	0,9892	1,0109	2,0000	1,0035	-0,0053	2,1640
18	2,1800	0,9891	1,0109	2,0000	1,0034	-0,0053	2,1619
19	2,1900	0,9891	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1599
20	2,2000	0,9890	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1581
21	2,2100	0,9890	1,0111	2,0000	1,0032	-0,0053	2,1565
22	2,2200	0,9889	1,0111	2,0000	1,0031	-0,0053	2,1551
23	2,2300	0,9889	1,0112	2,0000	1,0030	-0,0053	2,1539
24	2,2400	0,9888	1,0112	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1529
25	2,2500	0,9888	1,0113	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1520
26	2,2600	0,9887	1,0113	2,0000	1,0028	-0,0053	2,1513
27	2,2700	0,9887	1,0114	2,0000	1,0027	-0,0052	2,1507
28	2,2800	0,9886	1,0114	2,0000	1,0026	-0,0052	2,1503
29	2,2900	0,9886	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1501
30	2,3000	0,9885	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1500

Для нашего примера:

$$\left.\begin{array}{l} a_i = (1-0{,}5hx_i);\quad b_i = (1+0{,}5hx_i);\quad c_i = 2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i};\quad f_i = -h^2,\quad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ \nu_1 = \dfrac{2}{2-h},\quad \mu_1 = \dfrac{h}{h-2}0,\quad \nu_2 = 0,\quad \mu_2 = 2{,}15 \end{array}\right\}$$

Прямая прогонка.

Вычисляем сначала коэффициенты α_i, β_i:

$$\alpha_1 = \nu_1 = \frac{2}{2-h},\quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i},\quad i = 1,2,\ldots.,n-1$$

$$\beta_1 = \mu_1 = \frac{h}{h-2},\quad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i},\quad i = 1,2,\ldots.,n-1$$

,

т.е. по этим формулам мы вычислили $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n$; $\beta_2, \beta_3, \beta_4, ..., \beta_n$;

Обратная прогонка:

$$y_n = \frac{\nu_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \nu_2 \alpha_n} = 2{,}15$$

Сначала вычисляем , а затем остальные значения функции $y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, ..., y_1, y_0$:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1, 0$$